LISBON SCHOOL OF ECONOMICS & MANAGEMENT
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Matemática 2

Época de Recurso

Licenciaturas em Economia, Gestão e Finanças

Data: 6 de fevereiro de 2020 **Duração:** 2H

1. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & k & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

Indique, justificando, o valor lógico das seguintes afirmações:

(a) Se $\lambda = 2$ for valor próprio de A com multiplicidade algébrica 2, então $k = 3$.

Solução: Os valores próprios de A são as soluções da equação $|A - \lambda I| = 0$, isto é

$$(2 - \lambda)\left[(k - \lambda)(3 - \lambda) - 1\right] = 0.$$

Para $\lambda = 2$ ter multiplicidade 2, terá que ser raíz do termo $(k - \lambda)(3 - \lambda) - 1$, ou seja, $(k - 2)(3 - 2) - 1 = 0 \Leftrightarrow k = 3$. A afirmação é então **verdadeira**.

(b) $\lambda = 16$ é valor próprio da matriz $B = A^4$.

Solução: Como $\lambda = 2$ é valor próprio de A, $\lambda^4 = 2^4 = 16$ é valor próprio de A^4. Assim, a afirmação é **verdadeira**.

(c) Se $k = 1$, a forma quadrática $Q(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ é definida positiva.

Solução: Quando $k = 1$, os menores principais de A são $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = 2 > 0$ e $\Delta_3 = 2(3 - 1) = 4 > 0$, pelo que A é definida positiva, assim coma a forma quadrática associada. A afirmação é por isso **verdadeira**.

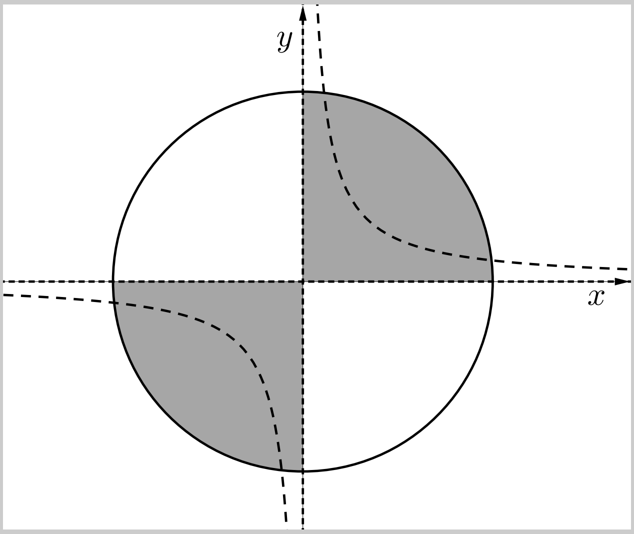
2. Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \frac{\sqrt{9 - x^2 - y^2}}{\log(xy)}.$$

(a) Determine analítica e geometricamente o domínio D de f, assim como o seu interior, exterior e fronteira.

Solução:

$$
\begin{aligned}
D =&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 9-x^2-y^2\geq 0 \wedge xy>0 \wedge \log(xy)\neq 0\}\\
=&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9 \wedge xy>0 \wedge y\neq \frac{1}{x}\}\\
\mathrm{Int}D =&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2< 9 \wedge xy>0 \wedge y\neq \frac{1}{x}\}\\
\mathrm{Ext}D =&\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2> 9 \vee xy>0\}\\
\mathrm{Fr}D =&\{(x,y\in\mathbb{R}^2) : (xy=0 \wedge x^2+y^2\leq 9)\vee(x^2+y^2=9\wedge xy\geq 0)\vee\\
&(xy=1\wedge x^2+y^2\leq 9)\}
\end{aligned}
$$



(b) Mostre que D não é aberto e apresente uma sucessão de termos em D que seja convergente para um ponto $(a,b)\notin D$.

Solução: O conjunto não é aberto pois existem pontos de D que não são interiores a D. Concretamente, os pontos nos arcos da circunferência $x^2+y^2=9$ que se situam no primeiro e terceiro quadrantes (e não estão sobre a curva $y=1/x$) pertencem ao conjunto mas, em qualquer vizinhança destes, existem pontos que não pertencem ao conjunto (todos os que se situam no exterior da cincunferência $x^2+y^2=9$).

Os termos da sucessão $u_n=\left(\frac{1}{n+1},\frac{1}{n+1}\right)$ pertencem a D, mas $\lim u_n=(0,0)\notin D$.

(c) Mostre que D não é compacto e indique o menor conjunto compacto que o contém.

Solução: O conjunto D não é compacto porque, apesar de ser limitado (está contido numa bola centrada na origem), não é fechado. Realmente,

$$\text{Ad}D = \text{Int}D \cup \text{Fr}D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9 \wedge xy \geq 0\} \neq D.$$

Como a aderência de um conjunto é o menor conjunto fechado que o contém, e neste caso a aderência de D também é um conjunto limitado, concluímos que AdD é o menor conjunto compacto que contém D.

3. Considere a função $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \sin(x-y)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) Calcule a derivada de g, segundo o vetor $(u,v) \neq (0,0)$, no ponto $(0,0)$.

Solução: Dado um vetor $(u,v) \neq (0,0)$, a derivada pedida é definida por

$$\begin{aligned} \partial_{(u,v)} g(0,0) &= \lim_{t\to 0} \frac{g(0+tu, 0+tv) - g(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{u^3t^3 \sin(tu - tv))}{t(t^2u^2 + t^2v^2)} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{u^3 \sin(t(u-v))}{u^2+v^2} = 0 \end{aligned}$$

(b) Mostre que g é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Considerando que: **i.** $\sin(x-y)$ é diferenciável por se tratar da composição de duas funções diferenciáveis, a função sin e a função polinomial $x-y$; **ii.** $x^3\sin(x-y)$ é diferenciável por se tratar de um produto de duas funções diferenciáveis; **iii.** x^2+y^2 é polinomial, e por isso diferenciável, e que **iv.** a função g é quociente de duas funções diferenciáveis em que o denominador não de anula em $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$; podemos concluir que g é diferenciável para qualquer $(x,y) \neq (0,0)$. Relativamente ao ponto $(0,0)$, g será diferenciável se

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{g(u,v) - g(0,0) - ug'_x(0,0) - vg'_y(0,0)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{u^3 \sin(u-v)}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} = 0.$$

Ora, considerando que

$$\begin{aligned} \left| \frac{u^3 \sin(u-v)}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} \right| &= \frac{u^2|u| \sin(u-v)}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} \leq \frac{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}\sin(u-v)}{(u^2+v^2)\sqrt{u^2+v^2}} \\ &= \sin(u-v) \to 0, (u,v) \to (0,0) \end{aligned}$$

fica demonstrado que o limite em análise é nulo e que por isso g é diferenciável em $(0,0)$. Como já tínhamos verificado que g é diferenciável quando $(x,y) \neq (0,0)$, fica justificado que a função é diferenciável em $\mathbb{R}^2$.

4. Seja $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $f(x,y,z) = g(y-z, z-x, x-y)$.

(a) Justifique que f é diferenciável e que se tem $\dfrac{\partial f}{\partial x} + \dfrac{\partial f}{\partial y} + \dfrac{\partial f}{\partial z} = 0$.

Solução: A função $\xi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $\xi(x,y,z) = (y-z, z-x, x-y)$ é diferenciável porque todas as suas componentes são funçoes lineares e por isso diferenciáveis. Como f é composição de duas funções diferenciáveis ($f = g \circ \xi$), concluímos que f é diferenciável. Agora, usando a regra da cadeia, e denominando $u = y - z$, $v = z - x$ e $w = z - y$ temos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial w} \\
\frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial w} \cdot \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v}
\end{aligned}$$

Somando, obtemos facilmente

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = -\frac{\partial g}{\partial v} + \frac{\partial g}{\partial w} + \frac{\partial g}{\partial u} - \frac{\partial g}{\partial w} - \frac{\partial g}{\partial u} + \frac{\partial g}{\partial v} = 0,$$

como pretendíamos mostrar.

(b) Sabendo que f é homogénea de grau 1, qual o valor de $f(1,1,1)$?

Solução: Como a função f é homogénea de grau 1 e diferenciável, verifica a identidade de Euler,

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + z\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = f(x,y,z).$$

Em particular, tomando $x = y = z = 1$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1,1,1) + \frac{\partial f}{\partial z}(1,1,1) = f(1,1,1).$$

Finalmente, tendo em conta o resultado da alínea anterior, o lado esquerdo da igualdade anterior é zero e concluímos que $f(1,1,1) = 0$.

5. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida pela expressão $f(x,y) = x\,y\,e^{x+y}$

(a) Determine e classifique todos os ponto críticos de f.

Solução: Os pontos críticos de f são as soluções do sistema $\nabla f(x,y) = (0,0)$:

$$\begin{cases} ye^{x+y} + xye^{x+y} = 0 \\ xe^{x+y} + xye^{x+y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1+x) = 0 \\ x(1+y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Assim, os pontos cricos de f são os pontos $(0,0)$ e $(-1,-1)$. Relativamente à sua classificação, recorremos à matriz Hessiana

$$\begin{aligned} H(x,y) = & \begin{pmatrix} ye^{x+y} + ye^{x+y} + xye^{x+y} & e^{x+y} + ye^{x+y} + xe^{x+y} + xye^{x+y} \\ e^{x+y} + ye^{x+y} + xe^{x+y} + xye^{x+y} & xe^{x+y} + xe^{x+y} + xye^{x+y} \end{pmatrix} \\ = & e^{x+y} \begin{pmatrix} 2y + xy & 1 + x + y + xy \\ 1 + x + y + xy & 2x + xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad H(-1,-1) = \begin{pmatrix} -1/e^2 & 0 \\ 0 & -1/e^2 \end{pmatrix}.$$

Como os menores principais de $H(0,0)$ são $\Delta_1 = 0$ e $\Delta_2 = -1$, $H(0,0)$ é indefinida e $(0,0)$ é um ponto de sela. Como os valores próprios de $H(-1,-1)$ são ambos negativos, $H(-1,-1)$ é definida negativa e $(-1,-1)$ é um maximizante local.

(b) Mostre que f não tem extremantes globais em $\mathbb{R}^2$.

Solução: Considerando que f é contínua em $\mathbb{R}^2$ e que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x,x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^{2x} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x,-x) = \lim_{x \to -\infty} -x^2 = -\infty,$$

vemos que f toma valores arbitrariamente grandes (negativos e positivos), pelo que não pode ter extremantes globais.

(c) Determine os possíveis extremantes de f em $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 1\}$.

Solução: Considerada a restrição proposta, o problema é equivalente a determinar os possíveis extremantes de $w(x,y) = exy$ sujeita à restrição $x + y = 1$, ou ainda, os extremantes de $w(x, 1-x) = ex(1-x)$. Considerando que esta última função tem um maximizante global em $x = \frac{1}{2}$, o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ será um maximizante global de f no conjunto M.

Alternativamente, poderíamos usar o método dos multiplicadores de Lagrange: Como a função objetivo e a restrição são funções diferenciáveis e a matriz jacobiana da restrição ($J = [1 \quad 1]$) tem característica máxima, sabemos que qualquer extremante será ponto crítico da Função Lagrangiana $L(x,y,\lambda) = xye^{x+y} - \lambda(x + y - 1)$, isto é,

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ye^{x+y} + xye^{x+y} - \lambda = 0 \\ xe^{x+y} + xye^{x+y} - \lambda = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ye^{x+y} + xye^{x+y} = \lambda \\ xe^{x+y} - ye^{x+y} = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} - \\ x = y \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{3}{4}e \\ x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases},$$

o que mostra que o único possível extremante será o ponto $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

6. Determine a solução do problema de valores iniciais

$$\begin{cases} y'' - 2y' + 10y = 10x^2 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \end{cases}.$$

Solução: A solução geral da equação proposta pode escrever-se na forma $y = y_h + y_p$, onde y_h é a solução geral da equação homogénea e y_p é uma solução particular da equação completa. Ora, como o polinómio $P(D) = D^2 - 2D + 10$ tem raízes $D = 1 \pm 3i$, a solução geral da equação homogénea é $y_h = k_1 \cos(3x)e^x + k_2 \sin(3x)e^x,\ k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Considerando que o segundo membro da equação é um polinómio de grau 2, vamos testar uma solução particular da forma $y_p = ax^2 + bx + c$

$$\begin{aligned} y_p'' - 2y_p' + 10y_p = 10x^2 &\Leftrightarrow 2a - 2(2ax + b) + 10(ax^2 + bx + c) = 10x^2 \\ &\Leftrightarrow 10ax^2 + (10b - 4a)x + (2a - 2b + 10c) = 10x^2 + 0 \cdot x + 0, \end{aligned}$$

Calculando os coeficientes a, c, b, concluímos que $y_p = x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}$ é solução particular da equação completa e portanto a sua solução geral é dada por

$$y(x) = k_1 \cos(3x)e^x + k_2 \sin(3x)e^x + x^2 + \frac{2}{5}x - \frac{3}{25}, \quad k_1, k_2 \in \mathbb{R}.$$

Resta aplicar as condições iniciais:

- $y(0) = 0 \Leftrightarrow k_1 - \frac{3}{25} = 0 \Leftrightarrow k_1 = \frac{3}{25}$.
- Como

$$y'(x) = -3k_1 \sin(3x)e^x + k_1 \cos(3x)e^x + 3k_2 \cos(3x) + k_2 \sin(3x)e^x + 2x + \frac{2}{5},$$

$$y'(0)=1 \Leftrightarrow k_1+2k_2+\frac{2}{5}=1 \Leftrightarrow 3k_2=1-\frac{3}{25}-\frac{2}{5} \Leftrightarrow k_2=\frac{4}{25}$$

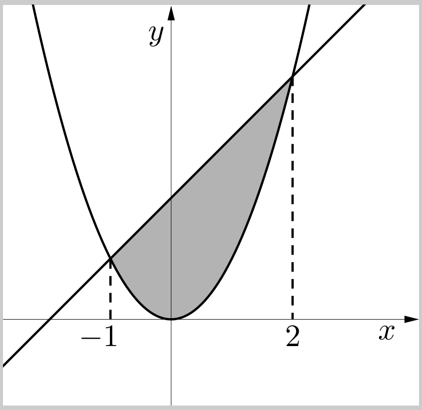
A solução do PVI proposto é então

$$y(x)=\frac{3}{25}\cos(3x)e^x+\frac{4}{25}\sin(3x)e^x+x^2+\frac{2}{5}x-\frac{3}{25}.$$

7. Dado $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2\le y\le x+2\}$, calcule

$$\iint_A (2xy-1)\,dx\,dy.$$

Solução:



$$\begin{aligned}\iint_A (xy-1)dxdy &= \int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2}(2xy-1)dy\,dx = \int_{-1}^{2}\left[xy^2-y\right]_{y=x^2}^{y=x+2}dx\\ &= \int_{-1}^{2}\left(x(x+2)^2-(x+2)-x^5+x^2\right)dx\\ &= \int_{-1}^{2}(-x^5+x^3+5x^2+3x-2)dx = \left[-\frac{x^6}{6}+\frac{x^4}{4}+\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-2x\right]_{-1}^{2}\\ &=\frac{26}{3}-\frac{23}{12}=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

Cotações:

1a	1b	1c	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	5a	5b	5c	6	7
1.5	0.75	0.75	1.5	0.75	0.75	0.75	1.75	1.5	1.0	2.0	1.0	1.5	2.5	2.0